

高雄市 109 學年度市立高級中等學校聯合教師甄選

數學科試題卷

【※答案一律寫在答案本上】

(一)、計算題:請寫下完整計算過程,否則不予計分。

(1)~(12)題,每題 7 分。

(1).已知一個五次多項式函數 $f(x)$, 領導係數為 1, 常數項為 -217, 且滿足

$$f(1)=1, f(2)=3, f(3)=5, f(4)=7, \text{ 則 } f(5)=?$$

(2). $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 圖形上斜率最小的切線 $g(x) = f'(-2)(x+2) + 10$,
若 $\int_{-a}^a g(x) = 0$, 試求 $f(x) = ?$

(3). $(x+\sqrt{3})^{21} + (1-x)^{32} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{32}x^{32}$,
若 $a_0 - a_2 + a_4 - a_6 + \dots + a_{32} = 2^k$, 則 $k = ?$

(4).由 1,2,3,...,20 挑出 x_1, x_2, x_3 三個數, 且 $x_1 < x_2 < x_3$, 求 x_1 與 x_2 至少差 4, x_2 與 x_3 至少差 5 的機率為何?

(5).求 $\left[\frac{1}{3}\right] + \left[\frac{2}{3}\right] + \left[\frac{2^2}{3}\right] + \dots + \left[\frac{2^{100}}{3}\right]$ 之值, 其中 $[a]$ 表示不超過 a 的最大整數。

(6).若實數 a, b, c 滿足 $\frac{a}{5} + \frac{b}{8} + \frac{c}{11} = \frac{a}{6} + \frac{b}{9} + \frac{c}{12} = \frac{a}{7} + \frac{b}{10} + \frac{c}{13} = 2$, 則 $a+b+c = ?$

(7).在坐標平面上, 到兩直線 $y=2x$ 及 $y=-2x$ 的距離之和小於或等於 12 的點所形成之區域面積為?

(8).求兩曲線 $y = x^3 - 3x + 1, y = x^3 - 3x + 33$ 的公切線方程式?

(9).一個袋子內有 1 顆紅球與 3 顆白球。小明每次從此袋中取一球後再放回, 連

取 12 次，若取出 k 次紅球可獲得 $k(k+2)$ 元的獎金，則小明所獲得獎金的期望值為多少？

(10). 一個盛滿水的半球形容器，將此半球形容器傾斜角 θ ，使容器內的水恰好倒掉全部的 $\frac{23}{27}$ ，求 $\sin\theta = ?$

(11). 已知 $2^x + 3^y + 5^z = 7$ ， $2^{x-1} + 3^y + 5^{z+1} = 11$ ；

若 $t = 2^{x+1} + 3^y + 5^{z+1}$ ，試求 t 的範圍？

(12). 已知有 10 顆顏色不同的鋼珠，其中 1 公克重的鋼珠 3 顆、2 公克重的鋼珠 4 顆、3 公克重的鋼珠 3 顆。將它們分成兩堆，每堆各 5 顆且重量恰好都是 10 公克，則總共有幾種分法？

(二)、證明題:每題 8 分

(1). 設 a 、 b 、 c 皆為正數，證明： $(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c)$

(2). 證明： $f(x) = x^8 - x^5 + x^2 + x + 1 = 0$ 沒有實根。